NOM	: ………………………………	DELAIS	: ……………………………..
PRENOM	: ……………………………...		: ……………………………..
CLASSE	: ………………………………		: ……………………………..

CTM N° 11

ANGLES ET CERCLES

AUTOEVALUATION

TRAVAIL

	T	S	P	J
J'ai toujours mon CTM au complet avec moi				
Je me munis du matériel nécessaire à la réalisation de la tâche				
Je respecte les consignes				
Je comprends la signification des questions posées				
Je réalise mon travail jusqu'au bout				
Je m'applique dans la réalisation de ma tâche				
Je soigne mon travail				
Je respecte le délai imposé				
Je gère mon travail dans le temps				
Je cherche spontanément des ressources complémentaires (si nécessaire)				

CORRECTION

	T	S	P	J
Je corrige complètement mon travail				
J'identifie la nature de mes erreurs (distraction – compréhension)				
J'identifie ce que je peux améliorer				
J'identifie ce que j'ai trouvé facile et difficile				
J'autoévalue objectivement mon travail				
Je cherche à améliorer mes points faibles				

AUTOEVALUATION GLOBALE	**A**	**EC**	**NA**

CTM 11 : Angles et cercles

I. Compétences à atteindre

	C1	Calculer, déterminer, estimer, approximer
	C2	Appliquer, analyser, résoudre des problèmes
	C3	Représenter
	C4	Repérer, comparer
	C5	Démontrer
	C6	Organiser les savoir, synthétiser, généraliser
	C7	Acquérir les notions propres aux mathématiques

II. Autoévaluation et évaluations formatives

Je dois être capable dans :	Auto-évaluation	1ère évaluation	2ème évaluation
C1			
1.6.1. Dans une configuration donnée, déterminer la mesure d'un angle en utilisant les propriétés des angles dans un cercle (angles inscrits, angles au centre et angles tangentiels)			
1.7.1. Dans une configuration donnée, relever les particularités qui forment des angles particuliers et déterminer ces derniers.			
C2			
2.4.4. Résoudre des problèmes mettant en œuvre les propriétés des angles particuliers.			
C3			
3.3.1. Construire une représentation géométrique complexe d'après une marche à suivre donnée.			
C4			
4.3.2. Traduire mathématiquement un énoncé et réciproquement dans un contexte algébrique ou géométrique.			

C5

5. Démontrer			

C6

6.2.4. Généraliser les propriétés des angles et des cercles à partir de plusieurs exemples numériques.			

C7

7.1. Mémoriser les définitions, énoncés et notations.			
7.2. Utiliser les définitions, énoncés et notations.			
Signature des parents			

III. <u>Tâches de deuxième année :</u>

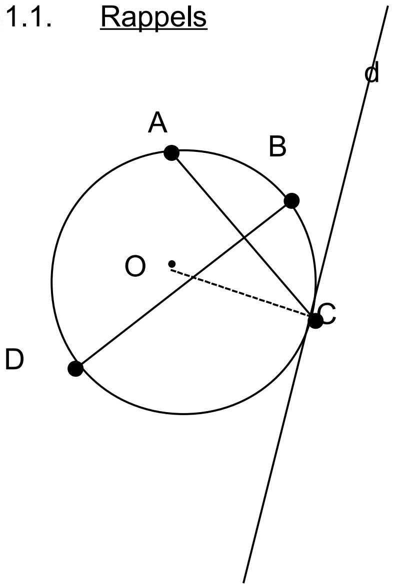
De plus, je dois toujours être capable de :	Auto-évaluation
Décrire les différentes figures géométriques de base en utilisant les termes corrects. (Ici, principalement les triangles et les cercles)	
Déterminer la somme des amplitudes des angles d'un triangle.	
Dans une configuration donnée, déterminer la mesure d'un angle en utilisant les propriétés des angles vues en 2ème : - Angles correspondants, alternes internes, alternes externes - Angles opposés par le sommet - Angles complémentaires, supplémentaires - Somme des angles d'un triangle (y compris le triangle isocèle et équilatéral) - Angles extérieurs d'un triangle	
Reconnaître et différencier les positions relatives de deux droites, d'un cercle et d'une droite.	

ANGLES ET CERCLES

CTM 1

1. Angle inscrit et angle au centre

1.1. Rappels



O est le **centre** du cercle

$\overset{\frown}{AD}$ est un **arc**.
*Un arc de cercle est un **morceau du cercle** dont les 2 extrémités sont des points du cercle.*

[AC] est une **corde**.
*Une corde est un **segment** dont les 2 extrémités sont des points du cercle*

[BD] est un **diamètre** avec | DO | = | OB |
*Un diamètre est une **corde passant par le centre** du cercle. Le centre est le milieu de tout diamètre.*

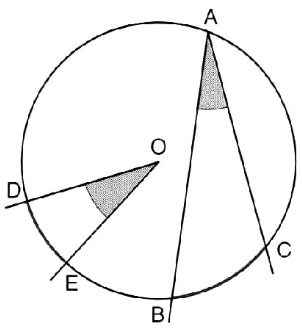
[DO] et [OB] sont des **rayons**.
Un rayon est un demi-diamètre.

d est une **tangente**.
*Une tangente est une **droite qui n'a qu'un seul point en commun** avec le cercle.*

Une tangente est toujours perpendiculaire au rayon aboutissant au point de contact entre elle et le cercle.

Ici, d $\perp$ [OC]

1.2. Définitions



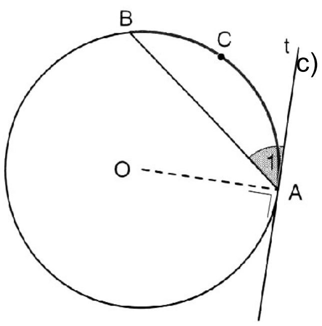
a) **Un angle au centre d'un cercle est un angle dont le sommet est le centre du cercle.**

Exemple : $\widehat{DOE}$ est un angle au centre du cercle.

b) **Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés sont des cordes du cercle.**

Exemple : $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans le cercle.

L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$.



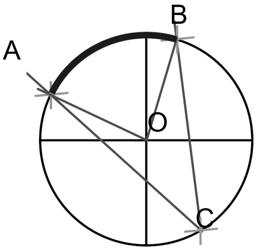
c) **Un angle tangentiel à un cercle est déterminé par une tangente et une corde aboutissant au point de contact.**

Exemple : $\widehat{A_1}$ est un angle tangentiel au cercle.

L'angle tangentiel $\widehat{A_1}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{BCA}$.

ANGLES ET CERCLES

CTM 2



d) On dit que deux angles ***INTERCEPTENT*** le même arc si l'intersection de ces deux angles avec le cercle est un **<u>même arc de ce cercle</u>**.

Exemple : Les angles $A\hat{O}B$ et $A\hat{C}B$ interceptent la même arc $\overset{\frown}{AB}$.

1.3. <u>Exercices (sur feuille annexe)</u>

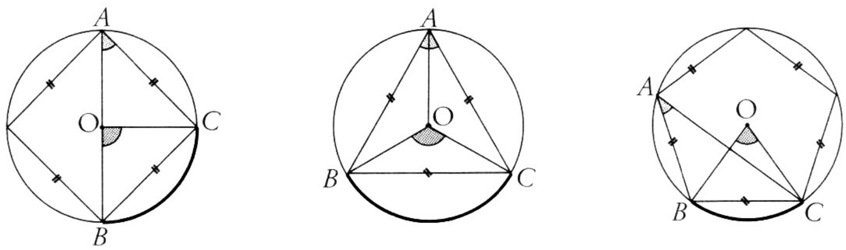
1. a. Tracer un cercle C de centre O et de rayon 3 cm.
b. Placer 3 points *A* , *B* et *M* sur le cercle.
c. Construire les trois tangentes à C en *A* , *B* , et *M* .

2. a. Tracer un cercle C de centre *O* et deux points *M* et *M'* diamétralement opposés sur ce cercle.
b. Construire les tangentes *d* et *d'* en *M* et *M'* au cercle C et démontrer qu'elles sont parallèles.

3. a. Tracer un cercle C de centre *O.*
b. Placer 4 points *A* , *B , X et Y* sur le cercle.
c. Tracer 2 angles inscrits différents interceptant le même arc $\overset{\frown}{BY}$.
d. Tracer un angle inscrit et un angle au centre interceptant le même arc $\overset{\frown}{AX}$.
e. Tracer un angle tangentiel au point A.

1.4. <u>Propriétés</u>

1) Calcule, à l'aide des propriétés des angles dans un triangle, l'amplitude de l'angle au centre et l'amplitude de l'angle inscrit dans chaque cas. (Angles noircis)



<u>Angle au centre :</u> $\lvert\hat{O}\rvert =$ .... ……………… Arc intercepté : …………. <u>Angle inscrit :</u> $\lvert\hat{A}\rvert =$ .... ……………… Arc intercepté : ………….	<u>Angle au centre :</u> $\lvert\hat{O}\rvert =$ .... ……………… Arc intercepté : …………. <u>Angle inscrit :</u> $\lvert\hat{A}\rvert =$ .... ……………… Arc intercepté : ………….	<u>Angle au centre :</u> $\lvert\hat{O}\rvert =$ .... ……………… Arc intercepté : …………. $\lvert\hat{B}\rvert =$ ……………………… Le triangle ABC est ………… <u>Angle inscrit :</u> $\lvert\hat{A}\rvert =$ .... ……………… Arc intercepté : …………….

Compare, à chaque fois, les amplitudes trouvées et l'arc intercepté par les 2 angles.

a) Que constates-tu ?

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

b) Ecris une règle généralisant cette constatation à tous les cercles :

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

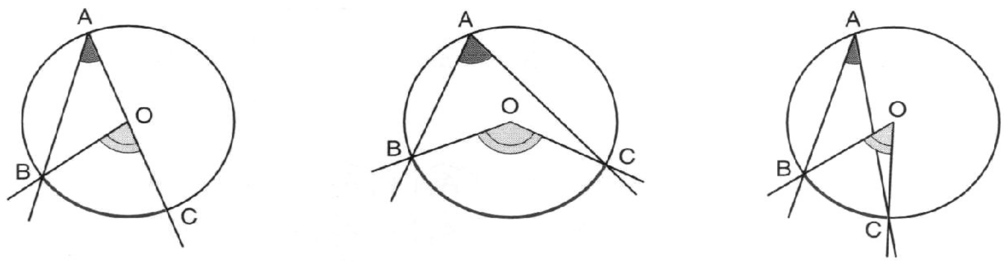
ANGLES ET CERCLES

CTM 3

L'amplitude d'un angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc.

Plusieurs cas se présentent :

- le centre appartient à un des côtés de l'angle inscrit (1);
- le centre est intérieur à l'angle inscrit (2);
- le centre est extérieur à l'angle inscrit (3).



(1) (2) (3)

<u>Démonstration du 1[er] cas :</u>

Attention, lis attentivement cette démonstration car tu vas devoir démontrer les 2 autres cas toi-même ensuite…Alors, sois attentif !

1er cas : le centre appartient à un des côtés de l'angle inscrit.

Données (hypothèse)

Cercle de centre O

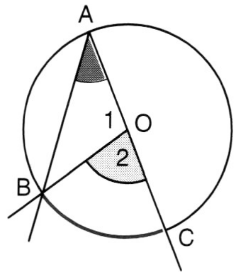
$O \in [AC]$

$\widehat{BAC}$ angle inscrit interceptant $\overset{\frown}{BC}$

$\widehat{BOC}$ angle au centre interceptant $\overset{\frown}{BC}$

Thèse

$|\widehat{BAC}| = \frac{1}{2} \cdot |\widehat{BOC}|$



Démonstration

L'angle $\widehat{O_2}$ est extérieur au triangle AOB $\Rightarrow |\widehat{O_2}| = |\widehat{A}| + |\widehat{B}|$ (1)

Or, $|OA| = |OB|$ (rayons du cercle) $\Rightarrow$ le triangle AOB est isocèle en O $\Rightarrow |\widehat{A}| = |\widehat{B}|$

En remplaçant dans (1) $|\widehat{B}|$ par $|\widehat{A}|$, on a :

$|\widehat{O_2}| = |\widehat{A}| + |\widehat{A}|$

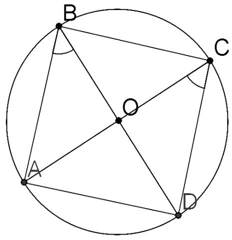
$|\widehat{O_2}| = 2 \cdot |\widehat{A}|$ Réduction de la somme

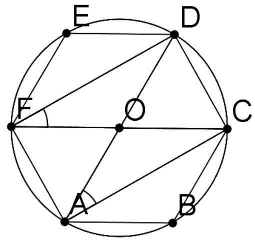
$\frac{1}{2} \cdot |\widehat{O_2}| = |\widehat{A}|$ Division des deux membres par 2

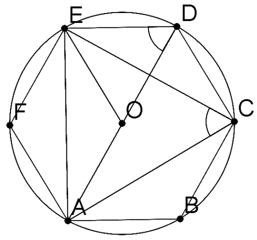
$\frac{1}{2} \cdot |\widehat{BOC}| = |\widehat{BAC}|$

…CQFD

2) Calcule, en utilisant les propriétés des angles dans un triangle, l'amplitude des angles inscrits (angles noircis) :







(Indice : Aides-toi des triangles AEC et EDO)

Angle inscrit 1 : $\lvert\hat{B}\rvert =$ .... Arc intercepté : …………..	Angle inscrit 1 : $\lvert\hat{F}\rvert =$ .... Arc intercepté : …………..	Angle inscrit 1 : $\lvert\hat{D}\rvert =$ .... Arc intercepté : …………..
Angle inscrit 2 : $\lvert\hat{C}\rvert =$ .... Arc intercepté : …………..	Angle inscrit 2 : $\lvert\hat{A}\rvert =$ .... Arc intercepté : …………..	Angle inscrit 2 : $\lvert\hat{C}\rvert =$ .... Arc intercepté : …………..

Compare, à chaque fois, les amplitudes trouvées et l'arc intercepté par les 2 angles.

a) Que constates-tu ?

……

……

b) Ecris une règle généralisant cette constatation à tous les cercles :

……

……

Dans un même cercle, des angles inscrits qui interceptent le même arc ont même amplitude.

Données (hypothèse)

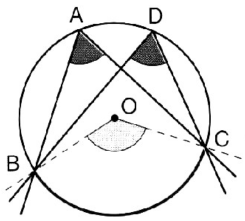
Cercle de centre O

$\widehat{BAC}$ angle inscrit interceptant $\overset{\frown}{BC}$

$\widehat{BDC}$ angle inscrit interceptant $\overset{\frown}{BC}$

Thèse

$|\widehat{BAC}| = |\widehat{BDC}|$



Démonstration

Traçons $\widehat{BOC}$ angle au centre interceptant $\overset{\frown}{BC}$.
Puisque l'amplitude d'un angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc, on peut écrire que :

$$\left.\begin{array}{l} |\widehat{BAC}| = \frac{1}{2} \cdot |\widehat{BOC}| \\ \\ |\widehat{BDC}| = \frac{1}{2} \cdot |\widehat{BOC}| \end{array}\right\} \Rightarrow |\widehat{BAC}| = |\widehat{BDC}|$$

1.5. Exercices

1.- Soit C le cercle circonscrit à un triangle *ABC* tel que $\left|B\hat{A}C\right|$ = 70° et |*BA*| = 5 cm et |*AC*| = 7cm.
On note *O* le centre de ce cercle.

a. Construire la figure.

b. On peut remarquer que $B\hat{O}C$ est un angle au centre. Peut−on trouver un angle inscrit associé à cet angle au centre ? Lequel ?

c. Quelle relation y a−t−il entre cet angle inscrit et $B\hat{O}C$?

d. En déduire la mesure de $B\hat{O}C$.

2.- Soit *ABCD* un quadrilatère et son cercle circonscrit (construire d'abord le cercle, puis le quadrilatère quelconque dont les sommets sont sur le cercle).

a. $A\hat{B}D$ est un angle inscrit. Quel arc intercepte−t−il ?

b. $A\hat{C}D$ est lui aussi un angle inscrit. Quel arc intercepte−t−il ?

c. Que peut−on dire alors des angles $A\hat{B}D$ *et* $A\hat{C}D$? Justifier.

3.-*ABD* est un triangle isocèle en *A* tel que $\left|B\hat{A}D\right|$ = 80° et |*BD*| = 6 cm. C est un cercle de centre *O*, circonscrit à ce triangle. [*BM*] est un diamètre de C.

a. Faire une figure.

b. Que peut−on dire du triangle *BDM* ?

c. Que valent $\left|B\hat{M}D\right|$, $\left|M\hat{D}B\right|$ et $\left|A\hat{B}D\right|$?

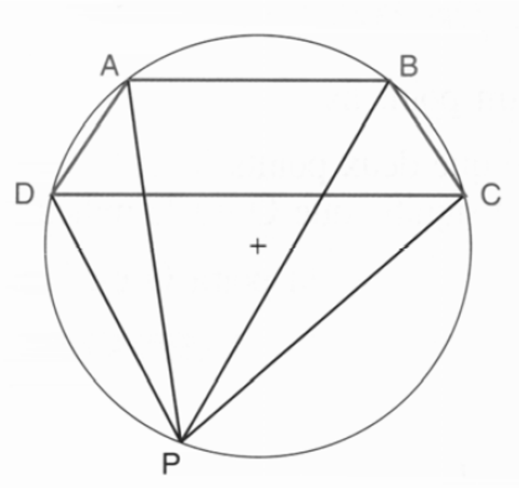
4..-Sur la figure ci−dessous, *ABCD* est un trapèze isocèle de bases [*AB*] et [*CD*]. On se propose de démontrer que $\left|A\hat{P}D\right| = \left|B\hat{P}C\right|$.

a. Citer deux angles inscrits qui interceptent l'arc *AC* qui contient *B*.

b. Citer deux angles inscrits qui interceptent l'arc *BD* qui contient *A*.

c. En déduire que $\left|D\hat{P}B\right| = \left|A\hat{P}C\right|$.

d. Rédiger la conclusion.

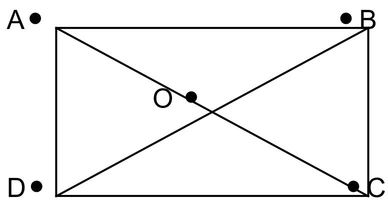


2. Triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle

2.1. Constructions

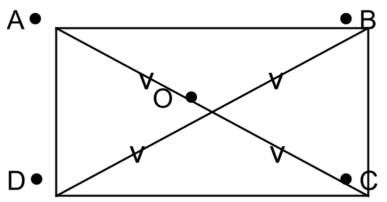
a) Rectangle inscrit

Voici un rectangle ABCD dont on a tracé les diagonales qui se coupent en O :

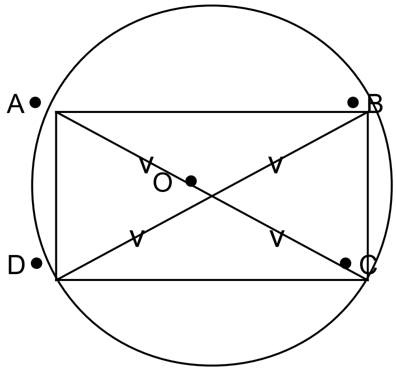


Nous savons que les diagonales d'un rectangle sont de mêmes longueurs et se coupent en leurs milieux.
On peut donc ajouter les symboles adéquats sur le dessin et noter que :

| *AO* | = | *OC* | = | *DO* | = | *OB* |



Ces 4 mesures, égales, pourraient être les rayons d'un même cercle de centre O puisque tous les rayons d'un même cercle ont même mesure. Ce cercle passerait par les points A, B, C et D (on dit que le rectangle ***est inscrit*** *dans le cercle).*



Observons les triangles ABC et ACD : **Ce sont tous les 2 des triangles …………………….**

dont l'hypoténuse est un ………………………………… du cercle.

A toi de jouer !

→ **Sur une feuille annexe, recommence la construction avec un parallélogramme non rectangle. Peux-tu tirer la même conclusion que ci-dessus ? Pourquoi ?**

……………………………………………………………………………………………………

b) Triangles rectangles de même hypoténuse (sur feuille annexe)

- Construis un triangle ABC rectangle en A.
- Cherche le cercle qui passe par ses 3 sommets A, B et C (le cercle inscrit). Aide-toi de l'exercice précédent…(**Sois attentif à la place que doit avoir l'hypoténuse dans le cercle…)**
- Trace 3 autres triangles rectangles en utilisant le segment [BC] du dessin précédent comme hypoténuse. Que remarques-tu ?

2.2. Théorie

1) Propriété 1

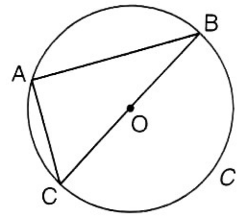
Tout triangle inscrit dans un demi cercle est rectangle.

Données (hypothèse)

Cercle $\mathcal{C}$ de centre O
[BC] diamètre
A $\in \mathcal{C}$

Thèse

ABC est un triangle rectangle en A



Démonstration

L'angle inscrit $\widehat{CAB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$; son amplitude vaut donc la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ interceptant le même arc $\overset{\frown}{BC}$.

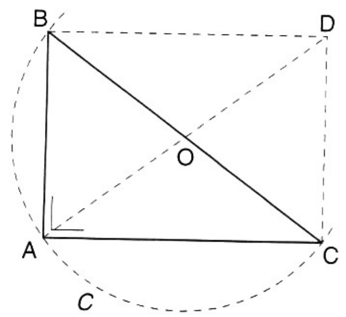
$\Rightarrow$ $|\widehat{CAB}| = \frac{1}{2} \cdot |\widehat{BOC}|$ or $|\widehat{BOC}| = 180°$

$\Rightarrow$ $|\widehat{CAB}| = 90°$

$\Rightarrow$ ABC est un triangle rectangle en A.

2) Propriété 2 (réciproque)

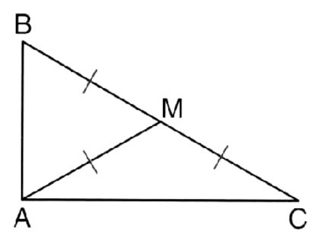
Tout triangle rectangle est inscriptible dans un demi cercle dont le diamètre est l'hypoténuse.



3) Conséquence de la propriété 2

Dans un triangle rectangle, la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse vaut la moitié de la longueur de celle-ci.

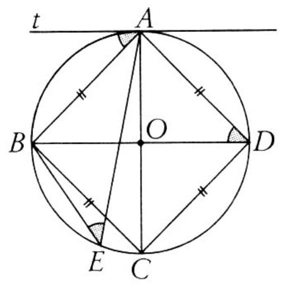
$|AM| = \frac{1}{2}\,|BC|$

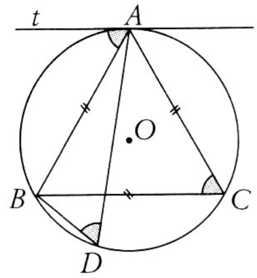


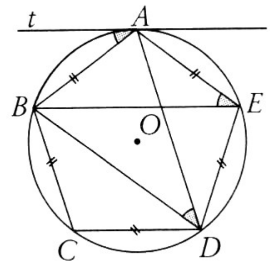
3. Angles tangentiels

3.1. Recherches

Calcule, sans utiliser le rapporteur, l'amplitude des angles colorés dans chaque cas.
Compare, à chaque fois, les amplitudes trouvées et l'arc intercepté par les 3 angles.







Angle 1 :	Angle 1 :	Angle 1 :
$\left\|\hat{D}\right\| =$ .... ………………	$\left\|\hat{C}\right\| =$ .... ………………	$\left\|\hat{E}\right\| =$ .... ………………
Arc intercepté : …………..	Arc intercepté : …………..	Arc intercepté : …………..
Angle 2 :	Angle 2 :	Angle 2 :
$\left\|\hat{E}\right\| =$ .... ………………	$\left\|\hat{D}\right\| =$ .... ………………	$\left\|\hat{D}\right\| =$ .... ………………
Arc intercepté : …………..	Arc intercepté : …………..	Arc intercepté : …………..
Angle 3 :	Angle 3 :	Angle 3 :
$\left\|\hat{A}\right\| =$ .... ………………	$\left\|\hat{A}\right\| =$ .... ………………	$\left\|\hat{A}\right\| =$ .... ………………
Arc intercepté : …………..	Arc intercepté : …………..	Arc intercepté : …………..

3.2. Théorie

Les angles colorés de sommet A sont appelés des **angles tangentiels**.

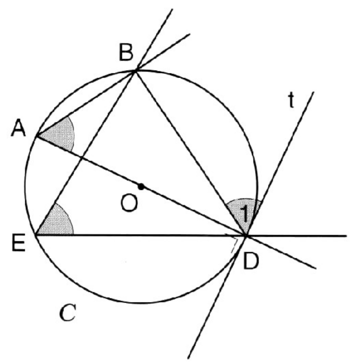
Tout angle tangentiel à un cercle a la même amplitude qu'un angle inscrit interceptant le même arc.

Données (hypothèse)

Cercle *C* de centre O
B ∈ *C*, D ∈ *C*
$\widehat{BED}$ angle inscrit interceptant l'arc $\overset{\frown}{BD}$
$\widehat{D_1}$ angle tangentiel interceptant l'arc $\overset{\frown}{BD}$

Thèse

$|\widehat{BED}| = |\widehat{D_1}|$



Démonstration

Traçons le diamètre [DA].

AD ⊥ t car la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon aboutissant au point de contact.

AB ⊥ BD car le triangle ABD est inscrit dans un demi-cercle.

⇒ $\widehat{BAD}$ et $\widehat{D_1}$ sont des angles aigus à côtés respectivement perpendiculaires.

⇒ $|\widehat{BAD}| = |\widehat{D_1}|$ (1)

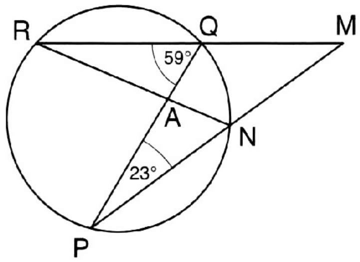
Or $\widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (2) car dans un même cercle, deux angles inscrits interceptant le même arc ont la même amplitude.

En comparant (1) et (2) ⇒ $|\widehat{BED}| = |\widehat{D_1}|$

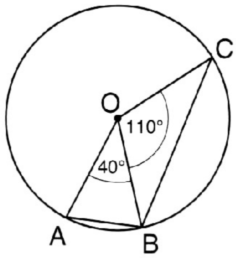
4. Exercices (sur feuille annexe)

4.1. Recherche d'amplitude d'angles

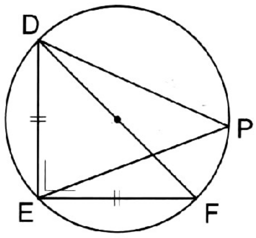
1) Si tu sais que les points R, Q et M sont alignés ainsi que les points M, N et P, calcule l'amplitude des angles suivants : $\widehat{MQA}$, $\widehat{RMP}$, $\widehat{RNM}$ et $\widehat{QAN}$.
Justifie.



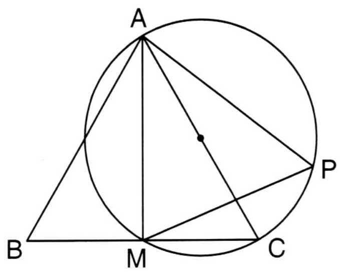
2) Calcule l'amplitude des angles du triangle ABC. Justifie.



3) Le triangle DEF est rectangle isocèle en E et P est un point de l'arc $\widehat{DF}$ du cercle circonscrit à DEF. Détermine l'amplitude des angles $\widehat{EPF}$, $\widehat{DPE}$ et $\widehat{DPF}$.
Justifie.

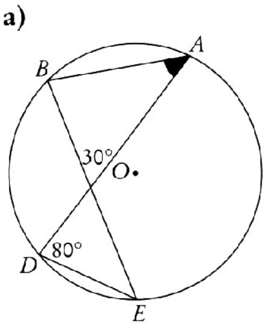


4) Dans le triangle équilatéral ABC, M est le milieu de [BC] et P est un point de l'arc $\widehat{AC}$ du cercle circonscrit au triangle AMC. Détermine l'amplitude des angles $\widehat{MPC}$, $\widehat{APC}$ et $\widehat{APM}$.
Justifie.

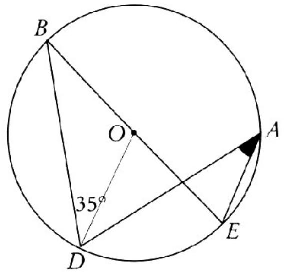


5) Détermine les amplitudes des angles colorés en utilisant les propriétés relatives aux angles. (les figures ne respectent pas les amplitudes des angles)

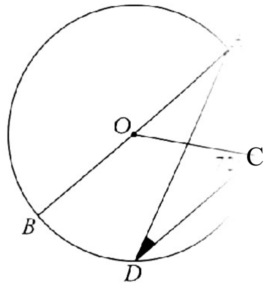
a)



b)



c) $AB \parallel DE$



4.2. Exercices de construction

1) Sur un cercle de centre O et de rayon r, place les points distincts A, B et M tels que $\overline{AB}$ = r et $A\hat{M}B$ doit aigu. Calcule l'amplitude de $A\hat{M}B$.

2) a) Construis le cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC.

   b) Place le point M de ce cercle si M ∈ $\overset{\frown}{AB}$.

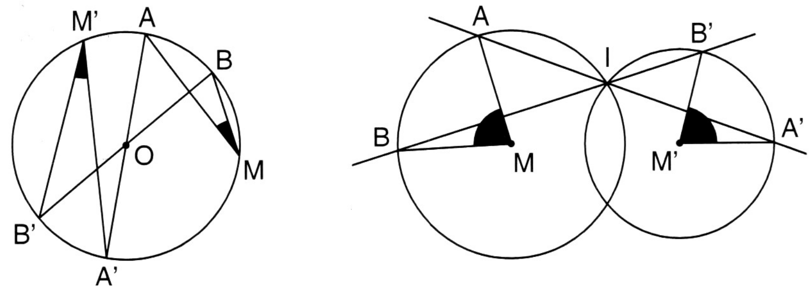
   c) Détermine les amplitudes des angles suivant : $A\hat{M}C,\ B\hat{M}C\ et\ A\hat{M}B$.

3) RSTV est un quadrilatère inscrit dans un cercle et le triangle RVT est isocèle et rectangle en V. Réalise un dessin puis calcule en justifiant l'amplitude des angles $V\hat{S}T,\ R\hat{S}V\ et\ R\hat{S}T$.

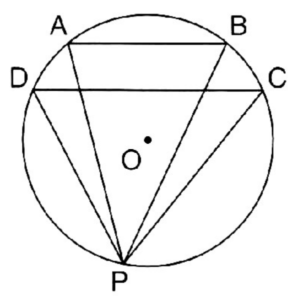
4) Construis un diamètre d'un cercle dont on ne connaît pas le centre.

4.3. Démonstrations

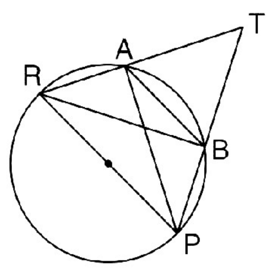
1) Dans chacune des figures ci-dessous, démontre que les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{A'M'B'}$ ont la même amplitude.



2) Sur la figure ci-contre, ABCD est un trapèze isocèle de bases [AB] et [CD]. Démontre que les angles $\widehat{APD}$ et $\widehat{BPC}$ ont la même amplitude.



3) Le triangle TRP est isocèle en T. Le cercle de diamètre [RP] coupe [TR] en A et [TP] en B. Démontre que les droites AB et RP sont parallèles.



ANGLES ET CERCLES	CTM 11

4) Construis un triangle ABC inscrit dans un cercle de centre O. Note K le point d'intersection de la médiatrice m de [BC] avec l'arc $\overset{\frown}{BC}$.
Démontre que AK est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

5) Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres O_1 et O_2 sont tangents en A à la droite t.
On mène par le point A une droite d_1 qui coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en B et le cercle $\mathcal{C}_2$ en D; on trace une seconde droite d_2 coupant le cercle $\mathcal{C}_1$ en E et le cercle $\mathcal{C}_2$ en F. Démontre que les droites BE et DF sont parallèles.

6) Sur une feuille annexe, démontre les 2 autres cas cités dans la théorie de la page « CTM 3 ».

Pour t'aider, voici quand même des pistes qui pourront t'être fort utiles…

2ème cas : Lorsque le centre du cercle est un point intérieur à l'angle inscrit :

- Pars du dessin de la théorie
- Trace le diamètre passant par le sommet de l'angle inscrit
- Applique la propriété démontrée dans le 1er cas

3ème cas : Lorsque le centre du cercle est un point extérieur à l'angle inscrit :

- Pars du dessin de la théorie
- Trace le diamètre passant par le sommet de l'angle inscrit
- Divise l'angle inscrit en 2 angles ayant un côté commun inclus dans le diamètre tracé et dont la différence des amplitudes égale l'amplitude de l'angle inscrit.